一級建築士学科試験対策 オンライン講義

力学３　「不静定構造物，断面の性質」



合格ロケット
https://5569et.com/

○不静定

前回までの力学1.2に比べて難易度はアップするけど「学科Ⅳ,Ⅴは55問を2:45で解く
→1問あたり3分(5分)
→6問で20~30分」
実際の過去問はパターンが限られているので「力学計算を嫌いにならないでね!」

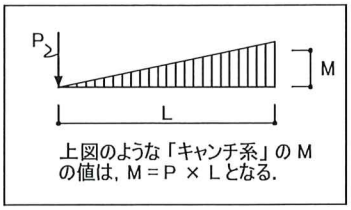
さて，M_{CA}，M_{CB}の値はすぐに求められますか？

キャンチ系であるため，

$M_{CA}=\frac{M}{L}\times a$

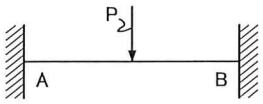
$M_{CB}=\frac{M}{L}\times b$

となります．

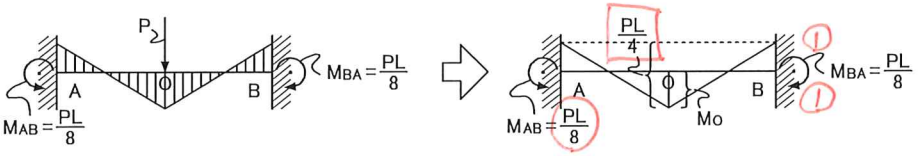


上図のような「キャンチ系」の M の値は，M＝P × Lとなる．

不静定構造物の暗記事項



上図の「不静定ばり」の M図は下図のようになります．



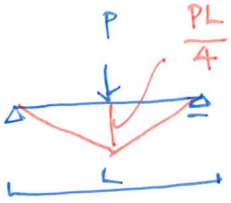
上図の「固定端」におけるモーメント反力 $\frac{PL}{8}$ は暗記しておいて下さい．

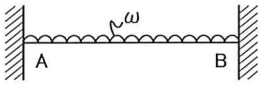
また，右図のはり中央部におけるモーメント内力を M_O とすると，

M_O =「集中荷重が作用する単純ばり中央部のモーメント」−「固定端モーメント」

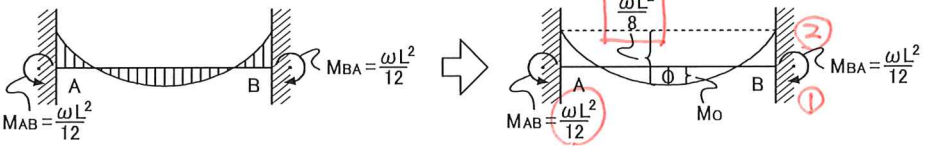
$=\frac{PL}{4}-\frac{PL}{8}=\frac{PL}{8}$

となります．この考え方も覚えておいて下さい．





上図の「不静定ばり」の M図は下図のようになります．



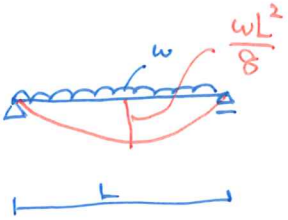
上図の「固定端」におけるモーメント反力 $\frac{\omega L^2}{12}$ は暗記しておいて下さい．

また，右図のはり中央部におけるモーメント内力を M_O とすると，

M_O =「等分布荷重が作用する単純ばり中央部のモーメント」−「固定端モーメント」

$=\frac{\omega L^2}{8}-\frac{\omega L^2}{12}=\frac{\omega L^2}{24}$

となります．この考え方も覚えておいて下さい．



この集中荷重，等分布荷重による「不静定ばり」材の固定端モーメント

$M=\frac{PL}{8}$

$M=\frac{\omega L^2}{12}$

は「端(ハ し)を自由に(ジュウニ)固定する．」と語呂で覚える．

剛度(K)

$K = \frac{I}{L}$

I ： 断面2次モーメント
L ： 材の長さ

⇦ 剛度とは単位長さあたりの「断面2次モーメント」であり，材の強さ，堅さを表します．

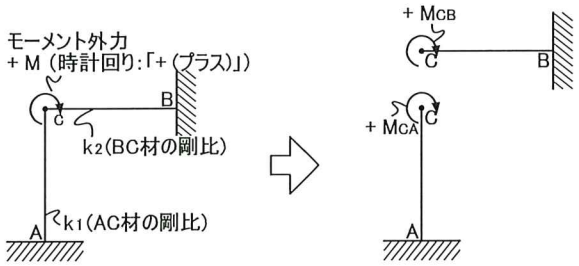
剛比(k)

$k = \frac{K}{k_0}$

K ： 剛度
k_0 ： 標準剛度

⇦ 任意の剛度を「標準剛度」と設定し，「標準剛度」と各材の剛度との比が剛比となる．

固定モーメント法



上図のような不静定構造物にモーメント外力 M が作用した場合について考えましょう．この場合モーメント外力 M は，右図のような内力M_{CA}，M_{CB} に分割され，AC材，BC材の内力伝達を受けます．

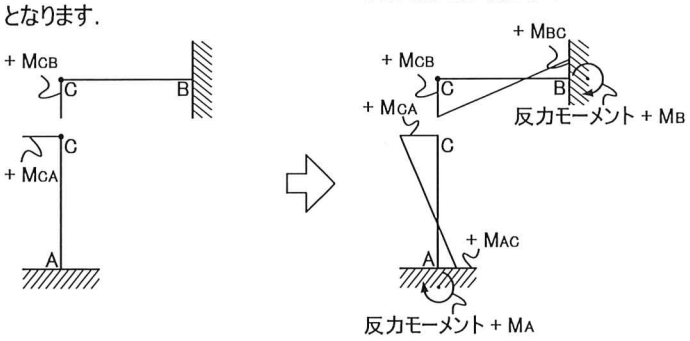
内力 + M_{CA}，+ M_{CB} の値は，それぞれの材の剛比の割合により分割され，

$$M_{CA} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \times + M$$

$$M_{CB} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \times + M$$

⇦ このときの M_{CA}，M_{CB}を「分割モーメント」と呼びます．また，この分割式より，剛比の大きい材（強い材）の方へより多くの力が流れることが分かります．（力は強い方に流れる．）

となります．



そして，右図のように固定端の支点へと内力伝達されます．このとき，

$$M_{AC} = M_{CA} \times \frac{1}{2}$$

$$M_{BC} = M_{CB} \times \frac{1}{2}$$

⇦ このときの M_{AC}，M_{BC}を「到達モーメント」という．

となります．

また，反力モーメント M_A = 内力M_{AC}，反力モーメント M_B = 内力M_{BC}になります．

この考え方を「固定モーメント法」といいます．

有効剛比と到達率

条件	有効剛比	到達率
他端固定（通常）	k	$\frac{1}{2}$
他端ピン	$\frac{3}{4}$k	0
対称変形	$\frac{1}{2}$k	-1（逆向き）
逆対称変形	$\frac{3}{2}$k	1

過去問題4シリーズ
- 柱と梁の剛比に力は比例する
- 固定端側に力は半分流れる．
- 柱と梁の接合点で力は釣りあう．

＜参考＞両端固定梁に集中荷重及び等分布荷重がかかる時の固定端モーメントの算出方法

・集中荷重Ｐがかかる場合

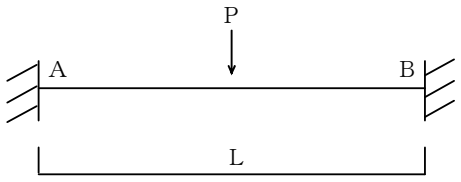


図１

図１を図２(a)，図２(b)に示すように，単純梁と材端モーメントＣに分割して考える．

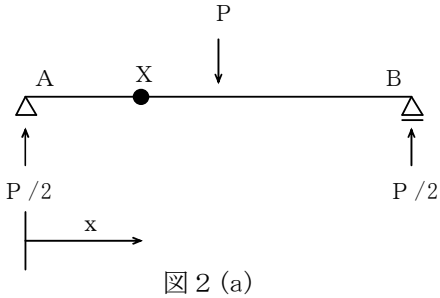


図２(a)

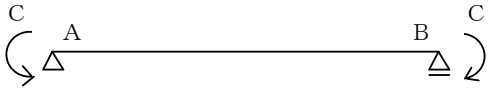


図２(b)

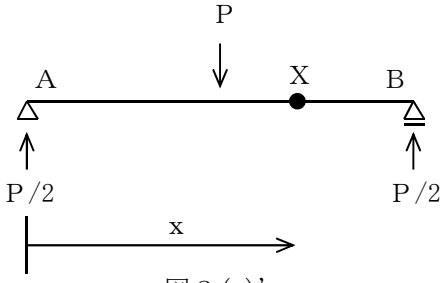


図２(a)'

(a)Ａ点からの距離xにおけるモーメントMx(x)は次式で表される．

Mx(x)=-P/2･x　(0≦x≦L/2)　図２(a)参照
Mx(x)=-P/2･x+P (x-L/2) =P/2･x-PL/2　(L/2≦x≦L)　図２(a)'参照

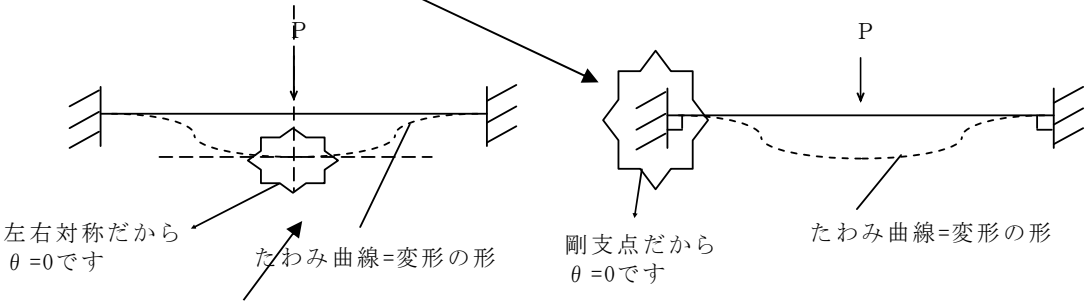
(b)両端固定梁の曲げモーメントM(x)は，図２(a)と図２(b)を重ね合わせて求めることが出来る．

M(x)=-P/2･x+C　(0≦x≦L/2)
M(x)=P/2･x-PL/2+C　(L/2≦x≦L)

X点におけるたわみ角θxは

$\theta x(x)=\int M(x)/2EI\cdot dx = 1/2EI\int(-P/2\cdot x+C)\,dx$
$=1/2EI\cdot(-P/4\cdot X^2+Cx+C1)$　C1は積分定数

x=0のときθx(0)よりC1=0

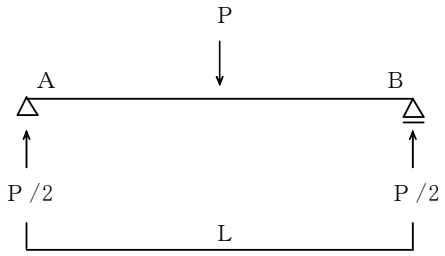


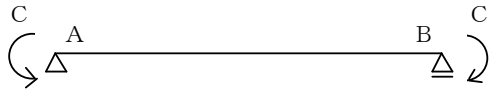
x=L/2のときθx(L/2)=0より

$\theta x(L/2) = 1/2EI\cdot(-P/4\cdot(L/2)^2+C\cdot L/2) = 0$

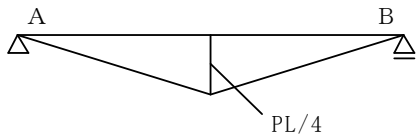
C=PL/8 ⟶ これが両端固定梁の中央に集中荷重Ｐがかかるときの材端モーメントＣの値です！

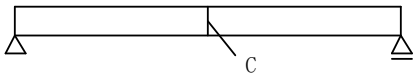
注)　集中荷重Ｐがかかる場合は積分を用いなくても「モールの定理」という解法を使って
材端モーメントＣを算出することが出来ます.



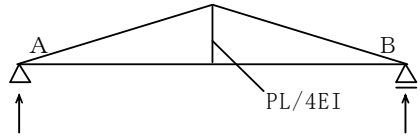


M図



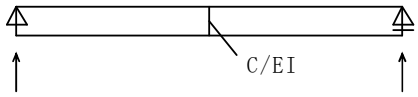


M/EI図



PL/4EI×L/2×1/2
=PL^2/16EI

PL^2/16EI



C/EI×L/2

C/EI×L/2

図３(a)　　図３(b)

$Q_A=\theta_A(a)=PL^2/16EI$ ←― これらが等しい ―→ $Q_A=\theta_A(b)=CL/2EI$

よって

$PL^2/16EI=CL/2EI$

$C=PL^2/16EI\times 2EI/L=PL/8$ ―→ これが両端固定梁の中央に集中荷重Ｐがかかるときの材端モーメントＣの値です！

・等分布荷重ωがかかる場合

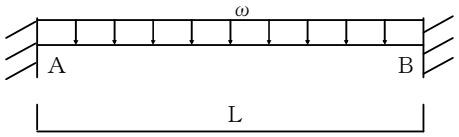


図１

図１を図２(a)，図２(b)に示すように，単純梁と材端モーメントＣに分割して考える．

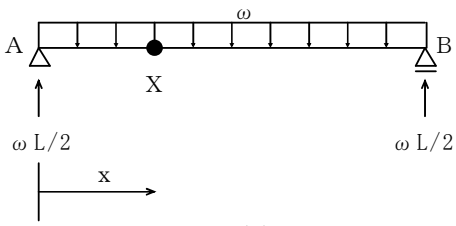


図２(a)

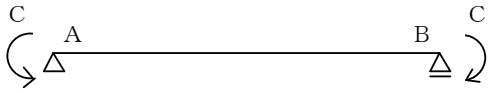


図２(b)

(a)Ａ点からの距離xにおけるモーメントMx(x)は次式で表される．

$Mx(x)=\omega x\cdot x/2-\omega L/2\cdot x=\omega/2\cdot x^2-\omega L/2\cdot x$

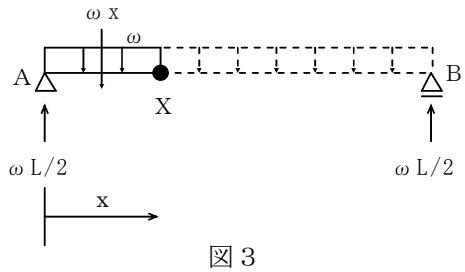


図３

(b)両端固定梁の曲げモーメントM(x)は，図２(a)と図２(b)を重ね合わせて求めることが出来る．

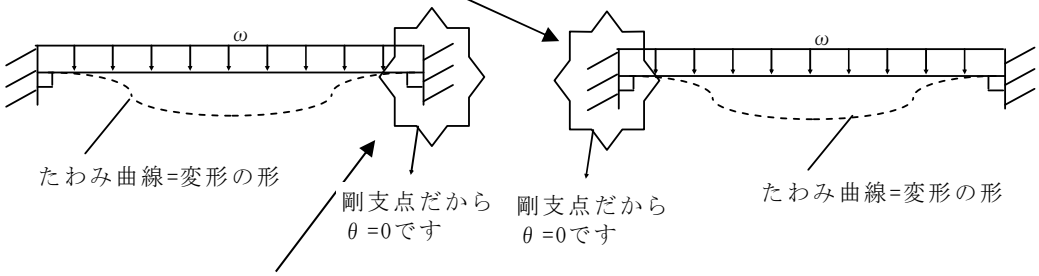
$M(x)=\omega/2\cdot x^2-\omega L/2\cdot x+C$

X点におけるたわみ角θxは

$\theta x(x)=\int M(x)/2EI\cdot dx \quad =1/2EI\int(\omega/2\cdot x^2-\omega L/2\cdot x+C)\ dx$

$=1/2EI\times(\omega/6\cdot x^3-\omega L/4\cdot x^2+Cx+C1)$　　C1は積分定数

x=0のとき$\theta x(0)$よりC1=0



x=L（B端）のとき$\theta x(L)=0$より

$\theta x(L)=1/2EI\times(\omega/6\cdot L^3-\omega L/4\cdot L^2+CL)=0$

$C=\omega L^2/12$ ⟶ これが両端固定梁の中央に等分布荷重ωがかかるときの材端モーメントＣの値です！

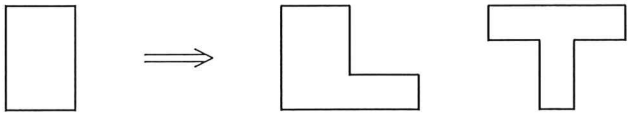
構造（力学計算編）ポイント解説　　(理)：理解すること　(暗)：暗記すること

断面の性質

定義は $S = \int y \cdot dA$

力学問題（問1～問6）では、ほぼ出題されていない。

Point①　▪断面1次モーメント（S）



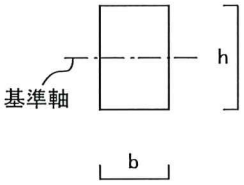
基本は矩形（四角形）の図心の位置の求め方

これらの形の図心位置の求め方　(理)

Point②　▪断面2次モーメント（I）　定義は $I = \int y^2 \cdot dA$

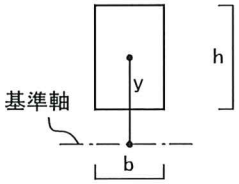
Iは、S造の「たわみ」「座屈」で出てくる E I（曲げ剛性）で使う。

↳ 部材の変形のしにくさのこと！



▪基準軸に対する断面2次モーメント　$I = \frac{b \times h^3}{12}$　(暗)

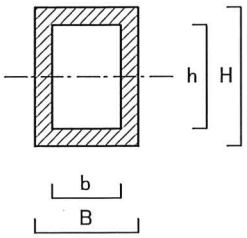
↳ 常に「どの軸」に対するIであるのか認識すること！



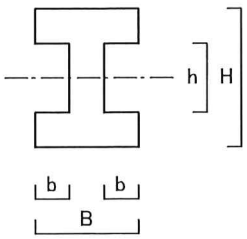
▪基準軸に対する断面2次モーメント

$I = \frac{b \times h^3}{12} + b \times h \times y^2$　(暗)

▪足し算・引き算が可能　(暗)



$I_x = \frac{B \times H^3}{12} - \frac{b \times h^3}{12}$　(理)

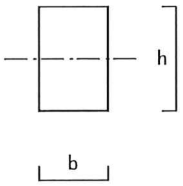


$I_x = \frac{B \times H^3}{12} - 2 \times \frac{b \times h^3}{12}$

▪断面2次半径
▪断面極2次モーメント

Point③ ・断面係数(Z)

↳ 曲げ強さ



$Z=\frac{I_x}{h/2}=\frac{b\times h^3}{12}\times\frac{2}{h}=\frac{b\times h^2}{6}$ (暗)

↳ 全塑性モーメント を参照！

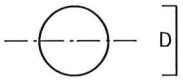
・足し算・引き算は不可 (暗)

↳ 断面2次モーメント(I)を計算して、重心軸から縁までの長さで割ること

Zは、曲げ応力度(σ_b)

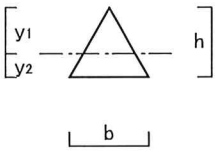
$\sigma_b=\frac{M}{Z}$ でできる

・おまけ



$I=\frac{\pi D^4}{64}$ (暗)

$Z=\frac{\pi D^4}{64}\Big/\frac{D}{2}=\frac{\pi D^3}{32}$ (理)



$I=\frac{b\times h^3}{36}$ (暗)

$y_1=\frac{2}{3}h \rightarrow Z_1=\frac{b\times h^3}{36}\Big/\frac{2}{3}h=\frac{b\times h^2}{24}$

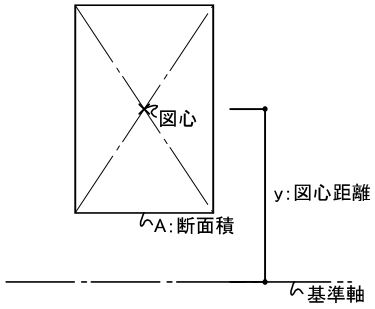
$y_2=\frac{1}{3}h \rightarrow Z_2=\frac{b\times h^3}{36}\Big/\frac{h}{3}=\frac{b\times h^2}{12}$ (理)

↳ 三角形の場合は、重心軸から縁までの長さは2つある($y_1\neq y_2$)ので、断面係数Zも2つ存在する！

02-1.「断面の性質」の解説

断面1次モーメント（ S ）

図形の図心（ = 重心 ）の位置を求める場合に利用する.

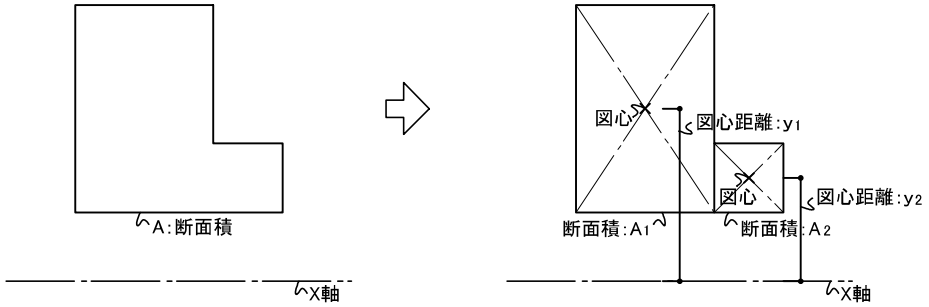


左の図形の断面1次モーメント（ S ）は,

S = 断面積（ A ） × 図心距離（ y ）

※基準軸から図心までの距離をこの教材では,
図心距離と呼びます.

上図のように「断面の性質」については,
ある図形断面が任意の軸（ = 基準軸 ）に対し,
どのような性質を持つか考えます.



上図のような図形断面におけるX軸からの図心距離（ y ）を求める場合,
右図のように図心距離が単純に求められるような図形に分割して考える.

このとき,
断面1次モーメント（ S ）= 全体の断面積（ A ） × 図心距離（ y ）
$= (A_1 \times y_1) + (A_2 \times y_2)$

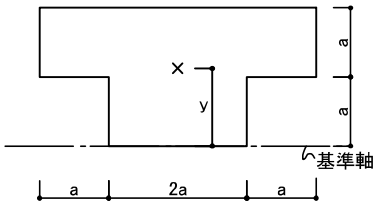
図形全体の断面1次モーメントは, 分割したそれぞれの図形の断面1次モーメントの和に等しい.
ただし, 考える基準軸が等しい場合に限る. このように共通の基準軸について断面の性質を求めることをこの教材では,「同軸系」と呼ぶ.

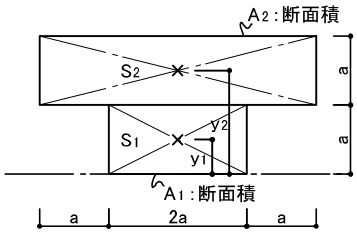
$$\therefore \text{図心距離}(y) = \frac{(A_1 \times y_1) + (A_2 \times y_2)}{A_1 + A_2}$$

となる.

例題

図に示す重心までの距離yを求めよ.





上図のように分割すると,

$S_1 = A_1 \times y_1 = (2a \times a) \times \frac{a}{2} = a^3$

$S_2 = A_2 \times y_2 = (4a \times a) \times \frac{3a}{2} = 6a^3$

図形全体の断面1次モーメント = 全体の断面積 × 図心距離(y) = $S_1 + S_2$

$y = \frac{(A_1 \times y_1) + (A_2 \times y_2)}{A_1 + A_2} = (a^3 + 6a^3) \times \frac{1}{(2a \times a) + (4a \times a)}$

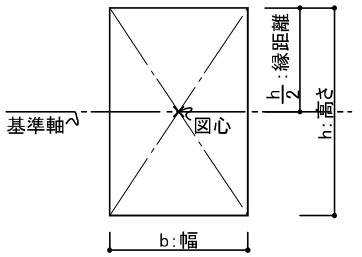
$= \frac{7a}{6}$

と求まる.

断面係数（Ｚ）

「断面係数」は曲げ強さを表す．

$$\text{断面係数（Ｚ）} = \frac{\text{図心を通る軸についての断面2次モーメント}}{\text{図心軸から縁までの距離（＝縁距離）}}$$

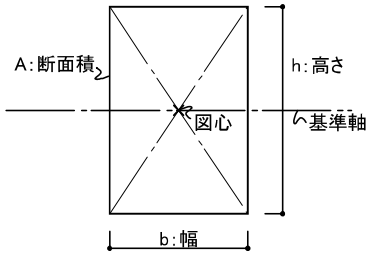


左の図形の断面係数（Ｚ）は，

$$Z = \frac{Ix}{\frac{h}{2}} = \frac{b \times h^3}{12} \times \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

断面2次半径（ｉ）

「断面2次半径」は圧縮材や曲げ材の座屈しにくさを示す．

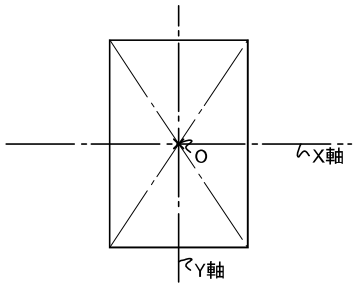


左図のように図心軸（＝図心を通る基準軸）についての断面2次半径（ｉ）は，

$$i = \sqrt{\frac{\text{基準軸についての断面2次モーメント（Ｉ）}}{\text{断面積（Ａ）}}}$$

断面極2次モーメント（I_P）

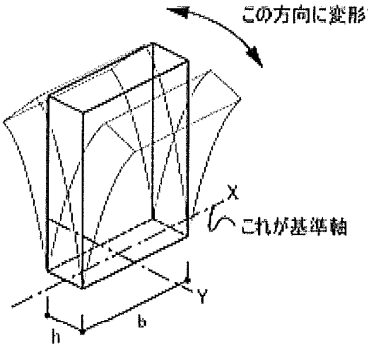
「断面極2次モーメント」は部材のねじれにくさを表す．

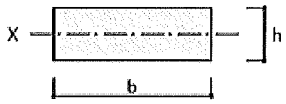


左図の図形のO点に関する断面極2次モーメント（I_P）は，

I_P ＝ X軸に関する断面2次モーメント（I_x）＋ Y軸に関する断面2次モーメント（I_y）

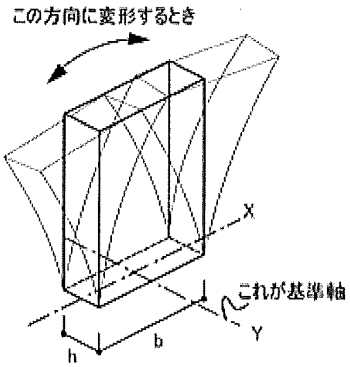
断面2次モーメント(I)，断面係数(Z)を求める際の「基準軸」について

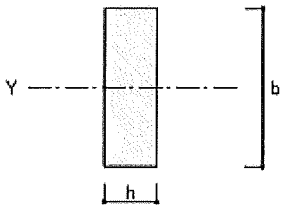




$$I_x = \frac{b \times h^3}{12}$$

$$Z_x = \frac{b \times h^2}{6}$$

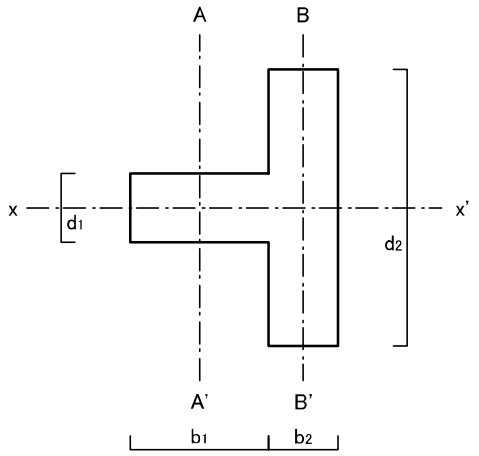




$$I_y = \frac{h \times b^3}{12}$$

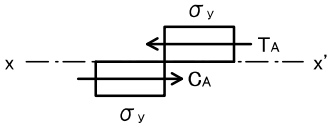
$$Z_y = \frac{h \times b^2}{6}$$

▪塑性断面係数Z_pは足し算▪引き算が可能
断面係数Zは足し算▪引き算が不可能　　の理由

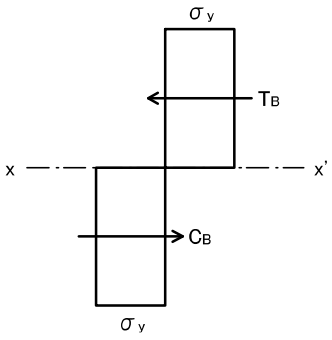


ｉ） 塑性断面係数Z_pについて

▪塑性断面係数Z_pとは、部材の全断面が降伏している状態になったときの断面係数のこと。



A−A'断面



B−B'断面

$M=Tj=Cj=(T_A+T_B)j=(C_A+C_B)j$

$T=C=b_1\times\frac{d_1}{2}\times\sigma_y+b_2\times\frac{d_2}{2}\times\sigma_y$

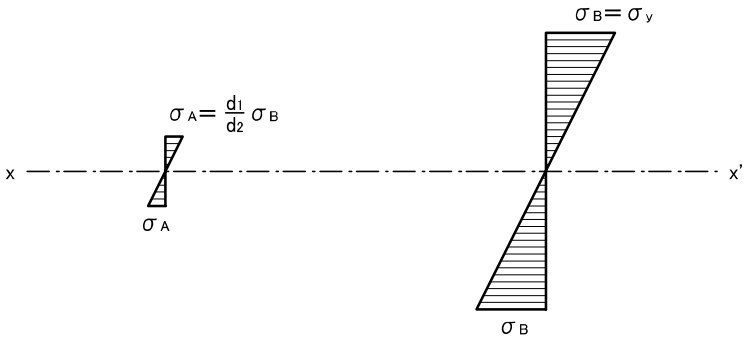
全塑性状態の時の中立軸は、図心を通る。
よってx軸から上半分の重心位置は、

$$x=\frac{b_1\times\frac{d_1}{2}\times\frac{d_1}{4}+b_2\times\frac{d_2}{2}\times\frac{d_2}{4}}{b_1\times\frac{d_1}{2}+b_2\times\frac{d_2}{2}}=\frac{j}{2}$$

$$M=Tj=Cj=\frac{\sigma_y}{2}(b_1d_1+b_2d_2)\times\frac{\frac{b_1d_1^2}{4}+\frac{b_2d_2^2}{4}}{\frac{1}{2}(b_1d_1+b_2d_2)}=(\frac{b_1d_1^2}{4}+\frac{b_2d_2^2}{4})\sigma_y=Z_p\cdot\sigma_y$$

ⅱ） 断面係数について

▪断面が全断面弾性である時、「平面保持の仮定」より下図のような応力状態になる。



A–A'断面　　B–B'断面

断面Aと断面Bの部分のモーメントをM_A, M_Bとすると

$M = M_A + M_B$　（…※1）

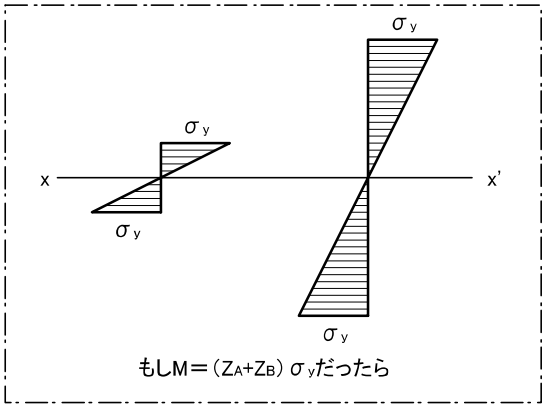
$= Z_A \cdot \sigma_A + Z_B \cdot \sigma_B$

$= Z_A \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \sigma_B + Z_B \cdot \sigma_B$

$= (\frac{d_1}{d_2} \cdot Z_A + Z_B) \cdot \sigma_B$

$= (\frac{d_1}{d_2} \cdot Z_A + Z_B) \cdot \sigma_y$

$\neq (Z_A + Z_B) \cdot \sigma_y$



もし$M = (Z_A + Z_B)\,\sigma_y$だったら

※1　$M = M_A + M_B$

$= Z_A \cdot \sigma_A + Z_B \cdot \sigma_B$

$= \frac{b_1 d_1^2}{6}\sigma_A + \frac{b_2 d_2^2}{6}\sigma_B$

$= \frac{b_1 d_1^2}{6} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \sigma_y + \frac{b_2 d_2^2}{6} \cdot \sigma_y$

$= \frac{1}{6}(\frac{b_1 d_1^3 + b_2 d_2^3}{d_2}) \cdot \sigma_y$

$= \frac{1}{12}(b_1 d_1^3 + b_2 d_2^3) / (\frac{d_2}{2}) \times \sigma_y$

$= I / (\frac{d_2}{2}) \times \sigma_y$

$= Z \cdot \sigma_y$